Жатық және құрама-жатық сызықтар

Негізгі тақырып—гельдер шартын қанағаттандыратын функциялар анықтамасы мен қасиеттері тақырыбына көшуден бұрын жазықтықта орналасқан жатық және құрама-жатық сызықтарға тоқталайық. Жатық сызықтар туралы айтқанда біз әрқашанда оларды жай сызықтар деп түсінетін боламыз, яғни олар өзін-өзі қимайды деп есептейміз.
Тұйық емес жатық контур немесе тұйық емес жатық доға деп параметр арқылы

$$x=x(s), \quad y=y(s), \qquad s_0 \le s \le s_1, \tag{1}$$

түрінде өрнектеуге болатын сызықты айтамыз, мұндағы s_0, s_1-белгілі бір ақырлы тұрақтылар, ал x (s), y (s)-осы көрсетілген кесіндіде үзіліссіз фунциялар әрі олардың $[s_0, s_1]$ кесіндісінде екеуі де бірден нөлге айналмайтын үзіліссіз $x'(s), y'(s)$ туындылары бар, сонымен бірге, s параметрінің көрсетілген кесіндідегі әр түрлі мәндеріне әр түрлі нүктелер (x,y) сәйкес келеді. Бұдан біз қарастыратын доғаның жатық, яғни оған жанама бағытының үзіліссіз өзгеретінін және ол доғаның жай және тұйық емес екенін байқаймыз.

s_0 және s_1 мәндеріне сәйкес келетін a және b нүктелерін доға ұштары деп атаймыз. Доғаны біз L арқылы белгілейміз. Жоғарыдағы (1) бойынша a және b ұштары L доғасының нүктелері және мұны айқындап, L-**жабық** доға деп айтамыз. Егер ұштары доғада жатпайтын болса, онда оны **ашық** доға деп айтамыз.

Жатық доғада s параметрінің өсуіне сәйкес анықталған оң бағыт таңдаймыз да ұштары a және b болатын доғаны ab арқылы да белгілейтін боламыз және әріптер ретін оң бағыттың a-дан b-ға әкелетіндей етіп таңдаймыз.

Сонымен, s параметрі үшін L доғасының белгілі бір нүктесінен басталатын және бағытқа байланысты анықталған таңбамен қамтамасыз етілген доға ұзындығын аламыз. Осыған байланысты

$$[x'(s)]^2 + [y'(s)]^2 = 1 \tag{2}$$

екенін табамыз.

s параметрін L доғасының нүктесіне сәйкес **доғалық абсцисса** деп атаймыз. s доғалық абсциссаға сәйкес нүктені t(s) немесе жай ғана t арқылы белгілейміз, сонда $s_0, s_1, s_2, \ldots$ доғалық абсциссаларға сәйкес нүктелерді t(s_0), t(s_1), t(s_2),… немесе $t_0, t_1, t_2, \ldots$ деп белгілеуге болады.

L сызығына **жанама** деп s-тің өсу жағына қарай жүргізілген оң жанаманы айтамыз. Егер θ арқылы t нүктесіне жүргізілген жанама мен ox өсі арасындағы бұрышты белгілесек, онда

$$\cos\theta = x'(s),\ \sin\theta = y'(s). \quad (3)$$

Бұдан θ бұрышы s-пен бірге үзіліссіз өзгеретінін байқаймыз.

Келешекте t нүктесінің аффиксін сол t әрпімен белгілей береміз де оған сәйкес t=x+iy деп жазамыз, мұнда x және y арқылы t нүктесінің координаты белгіленген. Егер t=t(s) нүктесінің доғалық абсциссасы s болса, онда

$$t' = \frac{dt}{ds} = \frac{dx}{ds} + i\frac{dy}{ds} = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta} \quad (4)$$

ал мұнан

$$|t'| = \left|\frac{dt}{ds}\right| = 1 \quad (5)$$

Егер (1) формулада s параметрінің әр түрлі мәніне әр түрлі (x, y) нүктесі сәйкес тек s=s_0, s=s_1 мәндері үшін x(s_0) =x(s_1), y(s_0)=y(s_1) болса, онда L сызығын **тұйық жатық контур** немесе **тұйық жатық доға** деп айтамыз.

Жатық сызық деп саны ақырлы тұйық немесе тұйық емес ортақ нүктелері жоқ тұйық немесе тұйық емес жатық доғалардың (контурлардың) бірігуін айтамыз.

Жай құрама-жатық доға немесе **жай құрама-жатық контур** деп әрқайсысының соңғы нүктесі келесісінің алғашқы нүктесі болатын жатық тұйық емес доғалардың ақырлы тізбегінен тұратын сызықты айтамыз. Ал ортақ нүктелері жоқ саны ақырлы жай құрама-жатық доғалардың ақырлы санынан тұратын жиынын **жай құрама-жатық сызық** деп атаймыз. Мұндай сызықтың жатық сызықтан өзгешелігі: мұнда саны ақырлы бұрыштық нүктелер болуы мүмкін.

Құрама-жатық сызық деп саны ақырлы ортақ нүктелері бар саны ақырлы құрама-жатық доғалар бірігуін айтамыз.

L құрама-жатық сызығын түзетін бір немесе бірнеше жатық доғалардың ұштары болатын нүктелерді L сызығының **тораптары** деп атаймыз. Мысалы, L сызығының ұштары және қосылатын екі жатық доғалардың қосылу нүктесі тораптық нүктелердің дербес жағдайлары.

Жатық қисықтағы H класының функциялары

Айталық, L-тұйық немесе ашық жатық доға, ал $\varphi(t)-$ осы қисық нүктелерінің функциясы болсын.

Егер осы қисықтың кез келген t_1 және t_2 екі нүктесі үшін

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| \le A|t_2 - t_1|^{\lambda} \quad (6)$$

теңсіздігі орындалса, онда $\varphi(t)$ функциясы L қисығында Гельдер шартын немесе $H^{\lambda}(L)$ шартын қанағаттандырады деп атаймыз, мұндағы A және λ - оң сандар. A тұрақтысын **Гельдер еселеуіші** деп, ал λ санын **Гельдер көрсеткіші** деп атаймыз. Әдетте A тұрақтысының мәніне көңіл бөлмейміз, ал егер λ көрсеткішінің мәнін айқын көрсету қажет болса, онда φ(t) функциясы $H^{\lambda}(L)$ шартын қанағаттандырады деп айтып, $\varphi(t) \in H^{\lambda}(L)$ арқылы белгілейміз. Егер $\lambda>1$ болса, онда (6) шарттан $\varphi'(t)$ туындысының нөлге тең екендігі шығар еді де, φ(t) функциясы тұрақтыға тепе-тең болар еді. Сондықтан біз $0<\lambda\le 1$ деп есептейміз. Егер $\lambda=1$ болса, онда Гельдер шарты белгілі Липшиц шартына көшер еді.

Егер φ(t) функциясы $H^{\lambda}(L)$ шартын қанағаттандырса, онда оның барлық $\nu\le\lambda$ үшін де $H^{\nu}(L)$ шартын қанағаттандыратынын байқаймыз. Ал керісінше $\nu>\lambda$ үшін жалпы мұндай тұжырым орындалмайды. Сонымен, кіші λ мәндерін кеңірек функциялар класы сәйкес келеді екен. Ең тар класс, әрине Липшиц шартын қанағаттандыратын функциялар класы. Мұнан, егер $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ – екі функциялары көрсеткіштері сәйкес λ_1, λ_2 Гельдер шарттарын қанағаттандырса, онда олардың қосындысы да, көбейтіндісі де, сонымен бірге бөлімі нөлге айналмайтын жағдайда, қатынасы да көрсеткіші $\lambda=\min(\lambda_1,\lambda_2)$ Гельдер шартын қанағаттандырады.

Ақырлы өсімше туралы теоремадан дифференциалданатын және ақырлы туындысы бар φ(t) функциясының Липшиц шартын қанағаттандыратынын көреміз. Керісінше, жалпы айтқанда, дұрыс емес екенін мына мысалдан көруге болады: нақты өсте берілген $\varphi(x)=|x|$ функциясы Липшиц шартын қанағаттандырады, бірақ координат бас нүктесінде оның туындысы жоқ, өйткені ол нүктеде оң және сол жақ туындылары сәйкес +1 және -1.

Күрделі функция үшін функциялық тәуелділік тізбегіндегі функциялар көрсеткіштерінің ең кішісі Гельдер көрсеткіші болады.

Мысал 1. $\varphi(x)=\sqrt{x} \in H^{1/2}(a,b)$ (мұндағы (a,b) нақты өстің кез келген интервалы) екенін, ал егер (a,b) интервалы нөл нүктесін ұстамаса, онда $\sqrt{x} \in H'(a,b)$ екенін көрсетіңдер.

2. $\varphi(x)=\dfrac{1}{\ln x}$, $x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$ және $\varphi(0)=0$. Осы функцияның $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ кесіндісінде Гельдер шартын қанағаттандырмайтынын, ал $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$ жарты интервалында Гельдер шартын қанағаттандыратынын көрсетіңдер.

H класы функциясының ұғымы көп айнымалылар функциясы үшін де жалпыланады. L жатық қисығының $t_1,t_2,...,t_n$ нүктелерінің $\varphi(t_1,t_2,...,t_n)$

функциясы $H^{\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n}$(L) класына жатады деп айтамыз, егер $t_1, t_2,..., t_n$ және $\tau_1, \tau_2,..., \tau_n$ кез келген қосақ мәндері үшін

$$|\varphi(t_1,t_2,...,t_n)-\varphi(\tau_1,\tau_2,...,\tau_n)| \le A_1|t_1-\tau_1|^{\lambda_1} + A_2|t_2-\tau_2|^{\lambda_2} + ... + A_n|t_n-\tau_n|^{\lambda_n}$$

теңсіздігі орындалса, мұндағы $A_1, A_2,..., A_n, \lambda_1, \lambda_2,..., \lambda_n$- оң тұрақтылар және $\lambda_1, \lambda_2,..., \lambda_n \le 1$.

Егер $\lambda_1, \lambda_2,..., \lambda_n$ көрсеткіштерінің мәндерін көрсетудің қажеті жоқ болса, онда біз жай ғана $\varphi(t_1,t_2,...,t_n) \in H(L)$ деп айтамыз. Ал $\lambda_1 = \lambda_2 = ... \lambda_n = \lambda$ жағдайында $H^{\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n}$(L) орнына $H^{\lambda}(L)$ деп жазамыз.

Егер λ саны $\lambda_1, \lambda_2,..., \lambda_n$ сандарының ең кішісі болса, онда

$$|\varphi(t_1,t_2,...,t_n)-\varphi(\tau_1,\tau_2,...,\tau_n)| < C\left[|t_1-\tau_1|^{\lambda} + |t_2-\tau_2|^{\lambda} + ... + |t_n-\tau_n|^{\lambda}\right]$$

теңсіздігі орындалатындай C тұрақтысын табуға болады.

Екі элементар теңсіздіктер

Гельдер шартын қанағаттандыратын функциялардың қарапайым қасиеттерін келтіруден бұрын элементар математиканың екі теңсіздігін келтірейік.

Айталық σ_1 және σ_2 кез келген екі оң сан, ал $0 \le \lambda \le 1$ болсын. Онда

$$\frac{\sigma_1^{\lambda}+\sigma_2^{\lambda}}{(\sigma_1+\sigma_2)^{\lambda}} \le 2^{1-\lambda}, \tag{7}$$

$$\frac{|\sigma_1^{\lambda}-\sigma_2^{\lambda}|}{|\sigma_1-\sigma_2|^{\lambda}} \le 1 \qquad (\sigma_1 \ne \sigma_2) \tag{8}$$

теңсіздіктері орынды.

Бұл теңсіздіктерді дәлелдеу үшін жалпылығын шектемей-ақ, $\sigma_1 \ge \sigma_2$-деп алуға болады. Сөйтіп, $\sigma = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ десек, біз (7), (8) теңсіздіктерді мына

$$\frac{1+\sigma^{\lambda}}{(1+\sigma)^{\lambda}} \le 2^{1-\lambda} \ (0 \le \sigma \le 1), \quad \frac{1-\sigma^{\mu}}{(1-\sigma)^{\mu}} \le 1 \ (0 \le \sigma \le 1)$$

түрлеріне келтіреміз.

Алдымен (7) теңсіздікті дәлелдейік. Ол үшін оның сол жағындағы функцияның туындысын нөлге теңесек,

$$\lambda\left(\sigma^{\lambda-1}-1\right)=0$$

аламыз. Бұдан $\sigma=1$ және бұл нүкте (7) сол жағындағы функцияның максимум нүктесі, демек , (7) сол жағы әрқашанда $2^{1-\lambda}$ санынан кіші.

Дәл солай (8) теңсіздікті де оңай дәлелдеуге болады.

Функциялардың Н класына тиісті болу қасиеттері

1^0. Айталық, $\mathrm{L}=ab$ ашық доғасы t_0 нүктесі арқылы $a\mathrm{t}_0$ және $t_0 b$ екі бөлікке бөлінген болсын. Егер $\varphi(t)$функциясы L доғасында үзіліссіз әрі $\varphi(t)\in \mathrm{H}^{\lambda}(at_0)$, $\varphi(t)\in \mathrm{H}^{\lambda}(t_0 в)$ болса, онда $\varphi(t)\in \mathrm{H}^{\lambda}(L)$.

Шынында да, айталық t_1 және t_2 L қисығының нүктелері болсын. Егер t_1 және t_2 екеуі де t_0 нүктесінің бір жағында жатса, онда шарт бойынша

$$\left|\varphi(t_1)-\varphi(t_1)\right|\le A\sigma_{12}^{\lambda}, \tag{9}$$

мұндағы $\sigma_{12}=\left|s_2-s_1\right|$ арқылы t_1 және t_2арасындағыL доғасы бөлігінің ұзындығы белгіленген (егер L тұйық болса, екі бөлігінің қысқа жағын аламыз).

Енді (9) теңсіздікті дәлелдейік. Егер t_0 қисығының тұрақты нүктесі, ал t-айнымалы нүктесі болса, және t_0 мен t нүктелерін керетін хорда ұзындығы r болса, онда

$$\frac{dr}{ds}=\pm\cos\alpha\ , \tag{10}$$

мұнда s арқылы t нүктесінің абсциссасы, ал α арқылы хорда мен t нүктесіне жүргізілген жанама арасындағы бұрыш белгіленген. «+» таңбасы $\mathrm{L}=ab$ ашық доғасының$t_0 b$ бөлігі үшін, ал «-» таңбасы $a\mathrm{t}_0$бөлігі үшін алынады. (10) теңдікті $a\mathrm{t}_0$ немесе $t_0 b$ бөліктерінің біреуін алып, s_1-ден s_2-ге дейін интегралдасақ және орта мән туралы теореманы қолдансақ

$$\left|r_2-r_1\right|=k\left|s_2-s_1\right|,\ \ 0<k_0\le k\le 1, \tag{11}$$

мұнда k_0– тұрақты, ал r_1,r_2 арқылы t_1мен t_2–ден t_0–ге дейінгі арақашықтық белгіленген.

Егер t_0 үшін t_1-ді алсақ

$$r_{12} = k\sigma_{12} \qquad (12)$$

теңдігін аламыз, мұнда r_{12} арқылы t_1 және t_2 нүктелерінің арақашықтығы, ал $\sigma_{12} = |s_2 - s_1|$ арқылы L-дің t_1 мен t_2 арасындағы ұзындығы белгіленген.

Осы (12) формуладан (9) шығады, өйткені

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| \le A|t_2 - t_1|^{\lambda}, \qquad (13)$$

ал $\varphi \in \mathrm{H}(L)$ болса, онда $\varphi \in C(L)$.

Егер $\varphi(\mathrm{t})$ (13) шартты арақашықтығы r_{12} белгілі δ санынан аспайтын кез келген t_1 және t_2 нүктелері үшін қанағаттандырса, онда бұл функция $\mathrm{H}^{\lambda}(L)$ шартын барлық L бойында қанағаттандырады. Шынында да, егер (13) барлық $r_{12} \le \delta$ үшін орындалса, онда бүкіл L доғасында

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| \le A' r_{12}{}^{\lambda},$$

мұнда A' арқылы A және $2M/\delta^{\lambda}$ сандарының үлкені, ал M арқылы $|\varphi(t)|$ функциясының жоғарғы шекарасы белгіленген. Сонда осы соңғы теңсіздіктен (12) көмегімен (9) теңсіздікті аламыз.

Егер t_1 және t_2 нүктелері t_0 нүктесінің әр түрлі жағында жатса, онда $t_1 t_0$ және $t_0 t_2$ доғаларының ұзындықтарын сәйкес σ_1 және σ_2 арқылы белгілеп және (7) теңсіздігі пайдаланып

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| \le |\varphi(t_2) - \varphi(t_0)| + |\varphi(t_1) - \varphi(t_0)| \le A(\sigma_1^{\lambda} + \sigma_2^{\lambda}) \le 2^{1-\lambda} A|\sigma_1 + \sigma_2|^{\lambda} \le 2^{1-\lambda} A\sigma_{12}^{\lambda}$$

дәлелдеу керек теңсіздікті аламыз.

2^0. Егер $\varphi(t) \in \mathrm{H}^{\mu}(L)$, $\psi(t) \in \mathrm{H}^{\nu}(L)$ болса, онда $\varphi(t) + \psi(t) \in \mathrm{H}^{\lambda}(L), \varphi(t) \cdot \psi(t) \in \mathrm{H}^{\lambda}(L)$, мұнда λ арқылы μ, ν сандарының ең кішісі белгіленген.

Дәлелдеуін $\varphi(t) \cdot \psi(t)$ үшін жүргізейік:

$$|\varphi(t_2)\psi(t_2)-\varphi(t_1)\psi(t_1)| \le |\varphi(t_2)\psi(t_2)-\varphi(t_2)\psi(t_1)| + |\varphi(t_2)\psi(t_1)-\varphi(t_1)\psi(t_1)| \le$$
$$\le M|\psi(t_2)-\psi(t_1)| + N|\varphi(t_2)-\varphi(t_1)|$$

мұндағы $M = \sup\limits_L |\varphi(t)|, N = \sup\limits_L |\psi(t)|$. Бұдан тұжырым дәлелдеуі шығады.

3^0. Егер $\varphi(t) \in \mathrm{H}^{\lambda}(L)$ және $\varphi(\mathrm{t}) \ne 0 \quad \forall \quad t \in L$ болса, онда $1/\varphi(t) \in \mathrm{H}^{\lambda}(L)$.

Дәлелдеуі дәл алдындағыдай.